PRISMA FISIKA, Vol. 6, No. 3 (2018), Hal. 205 – 209 ISSN : 2337-8204

Analisis Gejala *Chaos* pada Pendulum Nonlinear

Anton

Prodi Fisika, FMIPA Universitas Tanjungpura
Email : Antonphysic1996@gmail.com

Abstrak

Studi parameter penyebab *chaos* pada pendulum nonlinear teredam terkendali telah dilakukan. Solusi persamaan gerak didapatkan secara numerik dengan bantuan metode komputasi *explicit* Runge-Kutta (4,5). Solusi persamaan gerak digunakan untuk menghitung koefisien Lyapunov dari masing-masing parameter. Hasil koefisien Lyapunov dianalisis dengan diagram ruang fasa, grafik hubungan sudut simpangan (θ) terhadap waktu (t), dan analisis spektrum Fourier. Hasil analisis metode dinamika nonlinear, menunjukkan untuk parameter yang menghasilkan koefisien Lyapunov positif akan menyebabkan pendulum menjadi *chaos* yang diperlihatkan oleh lintasan acak pada diagram ruang fasa. Selain itu, hasil spektrum Fourier juga memperlihatkan pendulum berosilasi dengan banyak sekali frekuensi osilasi. Sedangkan, hasil analisis parameter yang menghasilkan koefisien Lyapunov negatif dan nol, menyebabkan gejala periodik pada pendulum. Gejala ini diperlihatkan oleh lintasan tertutup dan berulang pada diagram ruang fasa dan hasil analisis spektrum Fourier yang menunjukkan pendulum hanya memiliki beberapa frekuensi harmonik saja.

Kata Kunci : *chaos, pendulum nonlinear, koefisien Lyapunov, spektrum Fourier*

1. Latar Belakang

Hampir semua fenomena alam menunjukkan perilaku tidak teratur, tampak acak dan sangat sulit diprediksi. Fenomena ini dikenal dengan istilah *chaos.* Fenomena menakjubkan ini bisa ditemui pada banyak jenis sistem mekanik yang berosilasi, reaksi kimia, aliran fluida, laser [1], pertumbuhan populasi, penyebaran penyakit, dan banyak lagi [2].

Fenomena *chaos* hanya muncul pada sistem dinamis, nonlinear, [3] dan deterministik. Namun, tidak semua parameter nonlinear akan menyebabkan fenomena *chaos,* sehingga perlu analisis untuk membedakan parameter penyebab chaos dan bukan. Selain itu, ketika suatu sistem berada pada parameter *chaos*, sistem sangat sensitif terhadap perubahan nilai awal sehingga perilaku jangka panjang sistem hampir mustahil untuk diprediksi.

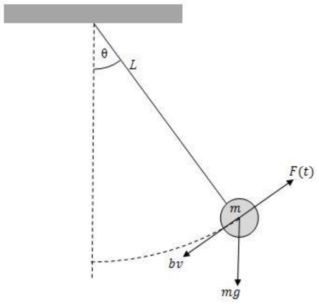
Pendulum merupakan salah satu sistem yang digunakan untuk mempelajari fenomena *chaos*. Penelitian mengenai fenomena *chaos* pada sistem pendulum sederhana teredam terkendali sudah pernah dilakukan, namun hanya secara kualitatif [4]. Selain itu, penelitian mengenai fenomena *chaos* pada pendulum tergandeng dua [5][6] secara kualitatif dan kuantitatif juga sudah dilakukan, namun sistem tersebut cukup kompleks sehingga sulit untuk mengenali sifat *chaotic* suatu sistem.

Penelitian ini menganalisis parameter penyebab *chaos* pada sistem pendulum nonlinear teredam dan terkendali. Solusi persamaan gerak dihitung dengan metode numerik *explicit* Runge-Kutta (4,5). Hasil solusi persamaan gerak dianalisis dengan menghitung koefisien Lyapunov, analisis grafik hubungan θ terhadap t, diagram ruang fasa, dan analisis spektrum Fourier. Hasil analisis dinamika nonlinear digunakan untuk membedakan sistem periodik dan sistem *chaos* pada pendulum nonlinear.

2. Metodologi

2.1 Persamaan Gerak Pendulum Nonlinear

Pendulum yang ditinjau digambarkan sebagai sebuah titik massa yang terikat pada tali dengan panjang tetap [7]. Titik massa berayun dengan sudut simpangan teta (θ) bolak-balik melalui titik kesetimbangannya. Gaya-gaya yang bekerja pada pendulum terdiri dari gaya gravitasi sebagai gaya pemulih, gaya gesek udara dan gaya kendali yang diberikan pada pendulum seperti diperlihatkan dalam Gambar 1 sebagai berikut.



Gambar 1. Gaya–gaya yang bekerja pada pendulum teredam terkendali

Dengan menggunakan hukum Newton, persamaan gerak pendulum dapat dituliskan

$$I\ddot{\theta} = \Gamma, \tag{1}$$

dengan I adalah momen inersia pendulum sedangkan Γ merupakan resultan torka yang bekerja pada pendulum. Selanjutnya, dalam kasus ini, I merupakan perkalian antara massa (m) dengan kuadrat panjang tali (l). Dari Gambar 1 tampak bahwa gaya–gaya yang menghasilkan torka adalah gaya pemulih gravitasi, gaya gesek udara dan gaya kendali pendulum. Gaya gesek udara memiliki besar *bv,* gaya pemulih sebesar $-mg\sin\theta$ dan gaya kendali pendulum $F(t)$. Persamaan gerak pendulum nonlinear secara lengkap dapat dituliskan sebagai

$$ml^2\ddot{\theta} = -bl^2\dot{\theta} - mgl\sin\theta + lF(t), \tag{2}$$

dengan b merupakan koefisien redaman oleh gaya gesek udara.

Dalam penelitian ini, gaya kendali pendulum *F(t)* diasumsikan berbentuk sinusoidal yang dituliskan sebagai

$$F(t) = F_0\cos(\omega_d t). \tag{3}$$

F_0merupakan amplitudo gaya kendali pendulum dan ω_d adalah frekuensi dari gaya kendali. Substitusi Persamaan (3) ke Persamaan (2) akan menghasilkan

$$\ddot{\theta} = \frac{-b}{m}\dot{\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{F_0}{ml}\cos(\omega_d t). \tag{4}$$

Untuk menyederhanakan Persamaan (4), koefisien *b/2m* dan *g/l* masing–masing dapat dituliskan ulang menjadi β dan ω_0^2. Sedangkan koefisien F_0/ml memiliki dimensi 1/s^2 dan dituliskan sebagai

$$\frac{F_0}{ml} = \gamma\omega_0^2. \tag{5}$$

Dalam Persamaan (5) di atas telah diperkenalkan parameter tidak berdimensi γ melalui definisi

$$\gamma = \frac{F_0}{ml\omega_0^2} = \frac{F_0}{mg}. \tag{6}$$

Koefisien γ disebut sebagai koefisien gaya kendali dan merupakan perbandingan antara besar amplitudo gaya kendali F_0 terhadap berat pendulum mg. Berdasarkan semua definisi di atas, didapatkan bentuk akhir dari persamaan gerak pendulum nonlinear sebagai [2]

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\sin\theta - 2\beta\dot{\theta} + \gamma\omega_0^2\cos(\omega_d t). \tag{7}$$

2.2 Tahapan Penelitian

2.2.1 Penentuan Parameter Persamaan Gerak

Pada penelitian ini ditentukan beberapa parameter yang digunakan untuk penelitian. Agar sistem dapat menampilkan gejala *chaos* dengan jelas, maka ditentukan dalam keadaan tanpa dimensi sehingga $m = g = l = 1$ [4]. Percepatan gravitasi g ditentukan sebesar 9,8 m/s^2 dengan panjang tali, l sebesar 9,8 m dan massa beban, m dianggap sama dengan 1. Konstanta redaman (β) diberikan nilai 0,2. Simpangan awal pendulum $\theta(0) = 1$ rad dan kecepatan sudut awal $\omega(0) = 0$ rad/ s. Kecepatan sudut gaya kendali (ω_d) dipilih sebesar 0,8.

2.2.2 Solusi Persamaan Gerak Sistem Pendulum

Persamaan (7) dapat ditulis sebagai tiga persamaan differensial tergandeng orde satu. Solusi persamaan gerak untuk parameter yang telah ditetapkan dituliskan sebagai

$$\frac{d\omega}{dt} = -\sin\theta - 0{,}4\omega + \gamma\cos(\varphi), \tag{8}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \tag{9}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0{,}8. \tag{10}$$

Dengan ω adalah kecepatan sudut sistem pendulum, θ adalah simpangan pendulum dari titik kesetimbangan dan φ adalah sudut simpangan dari frekuensi gaya kendali pada waktu t. Solusi dari tiga persamaan tergandeng tersebut kemudian didapatkan menggunakan metode numerik *explicit* Runge-Kutta (4,5).

2.2.3 Perhitungan Koefisien Lyapunov

Koefisien Lyapunov adalah nilai yang mencerminkan konvergensi atau divergensi dari dua buah lintasan ruang fasa yang berdekatan [8]. Fungsi Lyapunov sering digunakan untuk memeriksa kestabilan global dari suatu sistem nonlinear [9][10]. Koefisien Lyapunov dapat dihitung dengan persamaan [11]

$$L = \left(\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N}\ln\left|\frac{dX_{i+1}}{dX_i}\right| \tag{11}$$

Hasil koefisien Lyapunov positif akan menyebabkan sistem pendulum *chaos*. Sedangkan hasil koefisien Lyapunov negatif dan nol akan menyebabkan sistem pendulum periodik.

2.2.4 Perhitungan Spektrum Fourier

Analisis spektrum Fourier merupakan metode yang sering digunakan untuk analisis dan sintesis sinyal. Transformasi Fourier diskrit (DFT, *Discrete Fourier Transform*) digunakan untuk perhitungan spektrum Fourier pada sinyal durasi berhingga. Perhitungan spektrum Fourier pada data diskrit diberikan oleh pasangan transformasi Fourier diskrit (DFT) [12]

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jkn(2\pi/N}, \tag{12}$$

$$x(n) = \sum_{n=0}^{N-1} X(k)e^{jkn(2\pi/N}. \quad (13)$$

3. Hasil dan Pembahasan

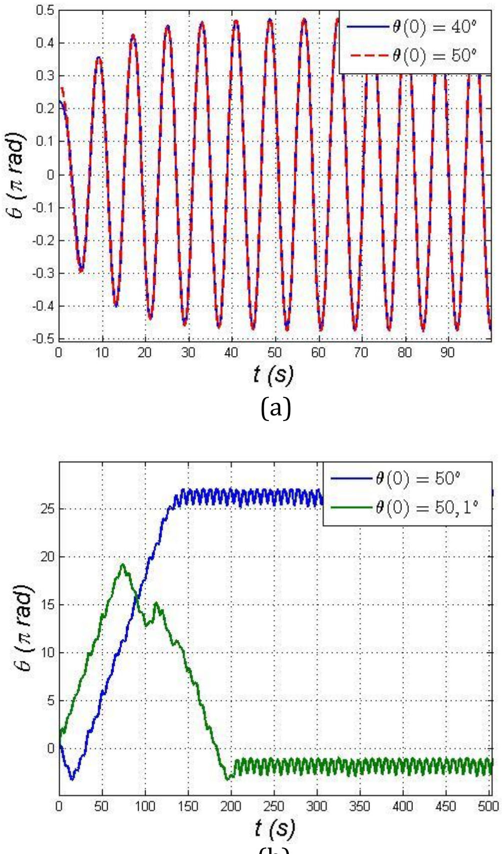
Persamaan gerak pendulum nonlinear teredam terkendali dari Persamaan (7) dapat ditulis menjadi

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta + 2\beta\dot{\theta} = \gamma\omega_0^2 \cos(\omega_d t). \quad (14)$$

Persamaan (14) adalah persamaan nonlinear yang cukup kompleks sehingga solusinya tidak bisa diperoleh secara analitik. Suku tambahan di sebelah kanan merupakan penyebab pendulum bisa berperilaku *chaos*. Suku tambahan ini adalah gaya eksternal yang diberikan pada pendulum. Gaya kendali yang dipilih diasumsikan berbentuk sinusoidal sehingga memiliki frekuensi sendiri.

Perilaku *chaotic* sistem pendulum sangat bergantung pada parameter koefisien gaya kendali (γ). Parameter γ dianalisis secara kuantitatif dengan menghitung koefisien Lyapunov (L) menggunakan Persamaan (11). Hasil koefisien Lyapunov menunjukkan dua hal paling penting dari sistem *chaos* yaitu sensitivitas terhadap kondisi awal dan perilaku acak sistem.

Gambar 2 (a) memperlihatkan grafik hubungan θ terhadap t untuk γ = 0,51.



(a)

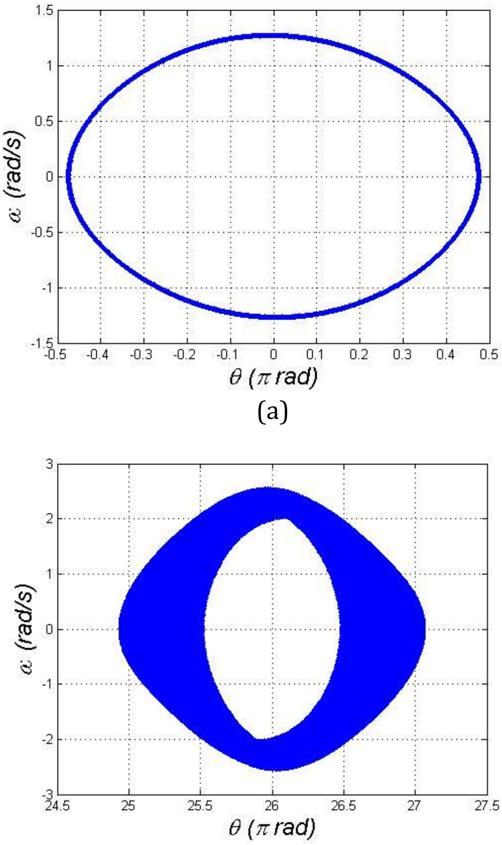
(b)

Gambar 2. Grafik hubungan θ terhadap t untuk (a) γ= 0,51 (b) γ = 1,32

Dua simpangan awal 40° dan 50° dipilih untuk melihat perilaku jangka panjang kedua lintasan tersebut. Setelah beberapa detik, kedua lintasan terlihat menyatu dan berosilasi dengan satu frekuensi osilasi. Lintasan tersebut disebut dengan atraktor dimana setelah waktu tertentu, semua lintasan akan menuju ke satu nilai tertentu[13].

Gambar 2 (b) memperlihatkan perilaku untuk γ = 1,32 dengan simpangan awal 50° dan 50,1°. Terlihat setelah beberapa puluh detik, kedua lintasan sudah terpisah jauh sekali, meskipun perbedaan simpangan awal pendulum yang diberikan hanya sebesar 0,1°. Pada keadaan ini, pendulum dikatakan memiliki sensitivitas terhadap kondisi awal yang sangat tinggi. Hal ini akan menyebabkan perilaku jangka panjang pendulum sangat sulit untuk diprediksi.

Perilaku acak sistem pendulum *chaos* dapat dilihat lebih mudah pada diagram ruang fasa seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.



(a)

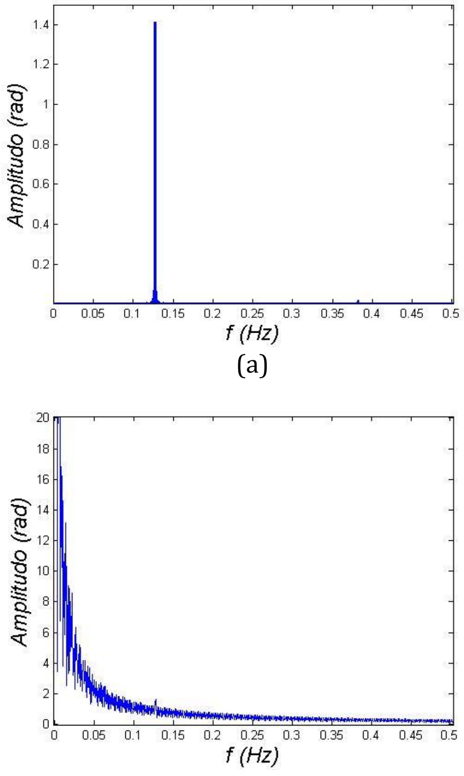
(b)

Gambar 3. Diagram fasa ω terhadap θ untuk (a) γ= 0,51 (b) γ = 1,32

Hasil yang ditunjukkan hanya lintasan setelah keadaan transien hilang. Keadaan transien sendiri merupakan keadaan ketika periode pendulum masih berubah-ubah terhadap waktu. Gambar 3(a) memperlihatkan perilaku periodik pedulum untuk γ = 0,51 yang ditunjukkan dengan lintasan pendulum tertutup dan berulang di dalam ruang fasa. Sedangkan Gambar 3 (b) menunjukkan sistem pendulum *chaos* untuk γ = 1,32. Dalam gambar tersebut terlihat lintasan pendulum tidak pernah kembali ke lintasan awal.

Selain itu, karakteristik dari gejala *chaos* juga analisis dengan spektrum Fourier. Gambar 4 (a) menunjukkan hasil analisis untuk γ = 0,51. Dalam gambar tersebut, terlihat pendulum hanya memiliki satu frekuensi harmonik saja. Hal ini menunjukkan bahwa pendulum berosilasi hanya dengan satu frekuensi harmonik seperti pada pendulum linear, sehingga pendulum bisa dikatakan bersifat periodik.

Hasil analisis spektrum Fourier untuk sistem pendulum *chaos* ditunjukkan oleh Gambar 4 (b) . Terlihat dalam gambar tersebut, pendulum memiliki banyak sekali frekuensi harmonik, sehingga bisa dikatakan sistem pendulum memiliki periode tidak terhingga. Banyaknya frekuensi harmonik dari pendulum ini, akan membuat gerakan osilasi pendulum menjadi acak dan tidak teratur. Banyaknya jumlah frekuensi harmonik inilah yang menyebabkan sistem pendulum berperilaku *chaotic*.

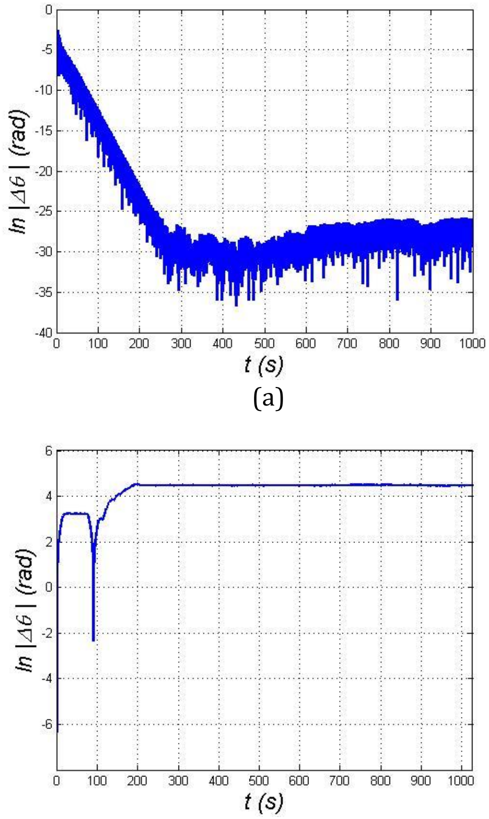


(a)

(b)

Gambar 4. Spektrum Fourier untuk koefisien gaya kendali (a) $\boldsymbol{\gamma}$ = 0,51 (b) $\boldsymbol{\gamma}$ = 1,32

Secara kuantitatif, analisis sistem *chaos* dilakukan dengan menghitung koefisien Lyapunov berdasarkan parameter yang sudah ditetapkan. Metode ini menitikberatkan pada sifat sensitivitas sistem pendulum terhadap kondisi awal yang dicirikan oleh konvergensi atau divergensi dua buah lintasan yang berbeda nilai awalnya. Gambar 5 menunjukkan grafik logaritma natural absolut dari perbedaan θ saat t untuk dua lintasan dengan perbedaan nilai awal 0,01 radian.



(a)

(b)

Gambar 5. Grafik logaritma natural absolut $\Delta\theta$ terhadap t untuk (a) $\boldsymbol{\gamma}$ = 0,51 (b) $\boldsymbol{\gamma}$ = 1,32

Nilai koefisien Lyapunov merupakan gradien dari grafik tersebut dan digunakan untuk menunjukkan konvergensi dan divergensi dari dua buah lintasan dalam diagram ruang fasa. Terlihat untuk γ = 0,51 memberikan gradien negatif. Hasil gradien negatif menunjukkan bahwa kedua lintasan semakin lama akan semakin mendekat menuju nilai tertentu. sedangkan untuk γ = 1,32 gradien grafik bernilai positif. Gradien positif akan menyebabkan kedua lintasan pendulum dalam ruang fasa semakin lama semakin menjauh yang merupakan ciri-ciri dari sistem pendulum *chaos.*

Perhitungan koefisien Lyapunov dilakukan berdasarkan Persamaan (11) dengan parameter yang telah dipilih pada metode penelitian.

Didapatkan untuk γ = 0,51, koefisien Lyapunov bernilai -0,002098. Sedangkan untuk γ = 1,32, koefisien Lyapunov bernilai 0,0007622. Parameter koefisien gaya kendali (γ) yang menghasilkan nilai koefisien Lyapunov negatif dan nol akan menyebabkan sistem pendulum berosilasi periodik seperti yang ditunjukkan oleh hasil analisis grafik hubungan θ terhadap t, diagram ruang fasa dan analisis spektrum Fourier. Sebaliknya jika nilai koefisien Lyapunovnya positif, akan menyebabkan sistem pendulum *chaos*.

4. Kesimpulan

Hasil penelitian menunjukkan bahwa gejala *chaos* pada pendulum sangat bergantung pada parameter koefisien gaya kendali (γ). Sistem pendulum periodik ditunjukkan oleh nilai koefisien Lyapunov negatif dan lintasan berulang serta tertutup pada diagram ruang fasa. Selain itu, sistem pendulum periodik juga ditunjukkan oleh hasil analisis spektrum Fourier yang memperlihatkan frekuesi harmonik yang dimiliki pendulum cukup sedikit. Sistem pendulum *chaos* dicirikan dengan lintasan acak dan tidak berulang pada diagram ruang fasa. Sedangkan, hasil perhitungan koefisien Lyapunov akan bernilai positif. Hasil analisis spektrum fourier untuk pendulum *chaos* memperlihatkan pendulum berosilasi dengan banyak sekali frekuensi harmonik. Ketika berada pada parameter chaos, lintasan pendulum sangat bergantung pada nilai awal, sehingga perilaku jangka panjang sistem pendulum hampir mustahil untuk diprediksi.

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Dr. Azrul Azwar dan Dr. Bintoro Siswo Nugroho sebagai dosen pembimbing. Selain itu, penulis juga mengucapkan terimakasih kepada COMDEV & OUTREACHING UNTAN yang telah mendanai riset.

Daftar Pustaka

[1] Rosenblum, M. Dan Pikovsky, A., Synchronization: from pendulum clocks to chaotic lasers and chemical oscillators, Contemporary Physics, 44(5), pp. 401-416, 2003.

[2] Taylor, J. R., Classical Mechanics, University Science Books, pp. 457-476, 2005.

[3] Strogartz, S. H., Nonlinear Dynamics and Chaos, Perseus Books, pp. 2-9, 1994.

[4] Rahayu, S. U., Analisis Kualitatif Gejala Chaos pada Gerak Pendulum Sederhana Nonlinear Teredam dan Terkendali, Skripsi, Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sumatera Utara, Medan., 2010.

[5] Shinbrot, T., Grebogi, C., Wisdom, J., dan Yorke, J. A., Chaos in a double pendulum, American Journal of Physics, 60(6), pp. 491-499, 1991.

[6] Monado, F., Hamiltonian dan Gejala Chaos, Tesis, Program Studi Fisika, Institut Teknologi Bandung., Bandung, 2000.

[7] Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J, Fundamental of Physics, 10th ed., John Wiley and Son, Inc, pp. 425-427, 2001.

[8] Williams, G. P., Chaos Theory Tamed, Joseph Henry Press, pp. 177-195, 1997.

[9] Sundari, R. dan Apriliani, R., Konstruksi Fungsi Lyapunov untuk Menentukan Kestabilan, JURNAL SAINS DAN SENI ITS, 6(1), pp. 28-32, 2017.

[10] Lina, O. L., Penggunaan metode Lyapunov untuk Menguji Kestabilan Sistem Linear, Jurnal Matematika UNAND, 3(2), pp. 29-33, 2014.

[11] Brotosiswojo, B. S., Pemodelan Matematika Gejala Alam, Unpar Press, pp. 13-15, 2006.

[12] Hidayat, Risanuri., Teknik Pengolahan Isyarat Digital, Deepublish, pp. 19-33, 2016.

[13] Grebogi, C., Ott, E., dan Yorke, J. A., Chaos, Strange Attractors and Fractal Basin Boundaries in Nonlinear Dynamics, SCIENCE, 238(4827), pp. 632-638, 1987.